

I) Limite sympathique [CG 2023]

1) Partie A : Quelques exemples

- On considère dans cette question, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $x^2 + \frac{1}{n}x - 1 = 0$, d'inconnue x .
 - Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle positive ; on la note x_n . Exprimer x_n en fonction de n .
 - Démontrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge ; on note x_∞ sa limite.
 - Démontrer que x_∞ est solution de l'équation $x^2 - 1 = 0$.
- On considère dans cette question, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $\frac{1}{n}y^2 - y - 1 = 0$, d'inconnue y .
 - Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle positive ; on la note y_n .
 - Démontrer que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ diverge.
- On considère dans cette question, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $z^3 + \frac{1}{n}z^2 - 1 = 0$, d'inconnue z .
 - Soit n un entier naturel non nul.
 - Étudier les variations de la fonction $z \mapsto z^3 + \frac{1}{n}z^2 - 1$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
 - En déduire que cette équation admet une unique solution réelle positive ; on la note z_n . Montrer que $z_n \in]0, 1[$.
 - Démontrer que la suite $(z_n)_{n \geq 1}$ est convergente. On pourra s'intéresser au signe du réel $z_{n+1}^3 + \frac{1}{n}z_{n+1}^2 - 1$.
 - On note z_∞ la limite de la suite $(z_n)_{n \geq 1}$. Démontrer que z_∞ est solution de l'équation $z^3 - 1 = 0$.
- On considère dans cette question, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $\frac{1}{n}t^3 - t^2 - 1 = 0$, d'inconnue t .
 - Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle ; on la note t_n .
 - La suite $(t_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

2) Partie B : Polynômes sympathiques

On considère un entier $d \geq 1$. La fonction P est un *polynôme de degré au plus d* s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_d$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Soit $P: x \mapsto a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré au plus d . On dit que :

- P est *initialement sympathique* si $a_0 = -1$ et si $a_k \geq 0$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq d$;
- P est *faussement sympathique* si $a_0 = -1$ et si $a_k \leq 0$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq d$;
- P est *vraiment sympathique* si $a_0 = -1$ et s'il existe un entier k tel que $1 \leq k \leq d-1$ et pour lequel $a_1 \leq 0, a_2 \leq 0, \dots, a_k \leq 0$ et $a_{k+1} > 0, a_{k+2} \geq 0, \dots, a_d \geq 0$.

Enfin, on dit que P est *sympathique* s'il est initialement, faussement ou vraiment sympathique.

- Quels sont les polynômes qui sont à la fois faussement sympathiques et initialement sympathiques ?
- Démontrer que tout polynôme faussement sympathique est
 - strictement négatif sur l'intervalle $[0, +\infty[$;
 - décroissant sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- Soit P un polynôme vraiment sympathique et initialement sympathique.
 - Démontrer que P est strictement croissant sur l'intervalle $[0, +\infty[$;
 - Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive.
- Soit P un polynôme vraiment sympathique mais pas initialement sympathique.
 - Montrer qu'il existe un réel $b > 0$, un entier $\ell \geq 0$ et un polynôme Q vraiment sympathique tels que $\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = bx^\ell Q(x)$.
 - Démontrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que le polynôme P vérifie les quatre propriétés suivantes :
 - P est décroissant sur l'intervalle $[0, r]$;
 - P est strictement croissant sur l'intervalle $[r, +\infty[$;
 - P est strictement négatif sur l'intervalle $[0, r]$;
 - l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[r, +\infty[$.
- Quels sont les polynômes sympathiques P pour lesquels l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution strictement positive ? Donner, dans ce cas, le tableau de signes de P sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3) Partie C : De la suite dans les idées

On considère des polynômes vraiment sympathiques $P_1, P_2, \dots$. On peut écrire chaque polynôme P_n sous la forme

$$P_n: x \mapsto a_{d,n}x^d + a_{d-1,n}x^{d-1} + \dots + a_{2,n}x^2 + a_{1,n}x + a_{0,n}.$$

On suppose en outre, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq d$, que la suite $(a_{k,n})_{n \geq 1}$ est convergente ; on note $a_{k,\infty}$ sa limite. On considère alors le polynôme P_∞ défini par

$$P_\infty: x \mapsto a_{d,\infty}x^d + a_{d-1,\infty}x^{d-1} + \dots + a_{2,\infty}x^2 + a_{1,\infty}x + a_{0,\infty}.$$

Enfin, pour tout entier $n \geq 1$, on note x_n l'unique solution strictement positive de l'équation $P_n(x) = 0$. Ci-dessous, on étudie la convergence éventuelle de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.

10. Soit t un réel fixé. Démontrer que la suite $(P_n(t))_{n \geq 1}$ converge vers $P_\infty(t)$.
11. Démontrer que le polynôme P_∞ est sympathique.
12. On suppose dans cette question que le polynôme P_∞ est vraiment sympathique, et on note x_∞ l'unique solution strictement positive de l'équation $P_\infty(x) = 0$.
 - a) Soit u et v deux réels tels que $0 < u < x_\infty < v$. Démontrer qu'il existe un entier $M_{u,v}$ tel que $P_n(u) < 0 < P_n(v)$ pour tout entier $n \geq M_{u,v}$.
 - b) En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers x_∞ .
13. On suppose dans cette question que le polynôme P_∞ est faussement sympathique. Démontrer que $(x_n)_{n \geq 1}$ diverge vers $+\infty$.
14. Retrouver les résultats de la partie A.

II) Suite positive et suite bornée [CG 2025]

Pour tout réel α , on appelle suite associée à α la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et

$$u_{n+2} = u_{n+1}^2 - \alpha u_n^4$$

pour tout entier $n \geq 0$. On dit que α vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si tous les termes de la suite (u_n) associée à α sont strictement positifs, et que α vérifie la propriété $\mathcal{B}$ si la suite (u_n) associée à α est bornée.

1) Partie 1 : Propriété $\mathcal{P}$

1. Quels sont les réels α qui vérifient la propriété $\mathcal{P}$ et qui appartiennent
 - a) à l'intervalle $[1; +\infty[$?
 - b) à l'intervalle $] - \infty; 0]$?
2. Soit $\alpha \in]0, 1[$ et (u_n) la suite qui lui est associée; on suppose, dans cette question, que α vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
 - a) Démontrer que $0 < u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ pour tout entier $n \geq 0$.
 - b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
 - c) Pour tout réel $n \geq 0$, on pose $x_n = \frac{u_{n+1}}{u_n^2}$. Exprimer x_{n+1} en fonction de α et de x_n .
 - d) Démontrer que la suite (x_n) admet une limite finie, que l'on notera x_∞ , et exprimer $x_\infty^2(1 - x_\infty)$ en fonction de α .
 - e) En déduire que $\alpha \leq \frac{4}{27}$.
3. Quels sont les réels α qui vérifient la propriété $\mathcal{P}$?

2) Partie 2 : Propriété $\mathcal{B}$

4. Quels sont les réels α qui vérifient la propriété $\mathcal{B}$ et qui appartiennent
 - a) à l'intervalle $] - \infty; 0]$?
 - b) à l'intervalle $[0; 1]$?
5. Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]2; +\infty[$ et (u_n) la suite qui lui est associée. Pour tout $n \geq 0$, on note v_n le plus grand des réels $|u_0|, |u_1|, \dots, |u_n|$, soit $v_n = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_n|\}$.
 - a) Démontrer, pour tout entier $n \geq 1$, que $v_n = |u_{n-1}|$ ou $v_n = |u_n|$.
 - b) Le réel α vérifie-t-il la propriété $\mathcal{B}$?
6. Soit $\alpha \in [\frac{9}{7}, 2]$ et (u_n) la suite qui lui est associée.
 - a) On pose $P(x) = \alpha x^3 - x - 1$ et $Q(x) = 8x^3 - 116x^2 + 494x - 441$. Montrer que $P\left(\frac{11-2\alpha}{7}\right) = \frac{(2-\alpha)Q(\alpha)}{7^3}$.
 - b) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto P(x)$ sur l'intervalle $[1; +\infty[$ et de la fonction $x \mapsto Q(x)$ sur l'intervalle $[1; 2]$.
 - c) Quel est le signe de $Q(\alpha)$?
 - d) Comparer les réels $\frac{11-2\alpha}{7}$ et $-u_3$.
 - e) Le réel α vérifie-t-il la propriété $\mathcal{B}$?
7. Soit $\alpha \in]1, \frac{9}{7}[$. Pour tout réel x , on pose $S_0(x) = x$, $S_1(x) = 1$, puis $S_{k+2}(x) = S_{k+1}(x)^2 - \alpha S_k(x)^4$ pour tout entier $k \geq 0$. On admet pour l'instant qu'il existe un réel $t(\alpha) > 1$ tel que $1 < S_4(x) \leq S_3(x)^2 \leq t(\alpha)^2 S_4(x)$ pour tout réel $x \in [1; t(\alpha)]$.
 - a) Soit $n \geq 0$ un entier tel que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n^2 < t(\alpha)^2 u_{n+1}$; on pose $x_n = \sqrt{\frac{u_n^2}{u_{n+1}}}$. Démontrer que $u_{n+k} = u_{n+1}^{2^{k-1}} S_k(x_n)$ pour tout entier $k \geq 1$.
 - b) Le réel α vérifie-t-il la propriété $\mathcal{B}$?
8. On démontre maintenant que l'unique réel positif $t(\alpha)$ tel que $t(\alpha)^4 = \frac{\alpha+2}{3}$ vérifie les hypothèses de la question 7).
 - a) Démontrer que $S_4(x) \leq S_3(x)^2$ pour tout réel x .
 - b) Démontrer que $0 < S_2(x)^2 \leq \frac{7(\alpha-1)}{12}$ pour tout réel $x \in [1; t(\alpha)]$.
 - c) Démontrer que $1 < S_4(x)$ pour tout réel $x \in [1; t(\alpha)]$.
 - d) Démontrer que $S_3(x)^2 \leq \frac{2+x^4}{3} S_4(x) \leq x^2 S_4(x)$ lorsque $x = t(\alpha)$.
 - e) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto \frac{S_4(x)}{S_3(x)^2}$ sur l'intervalle $[1; t(\alpha)]$.
 - f) Conclure.
9. Quels sont les réels α qui vérifient la propriété $\mathcal{B}$?